The Smith homology and a generalized Borsuk-Ulam Theorem (Transformation groups from a new viewpoint)

数理解析研究所講究録
第 1670 巻 2009 年 34-39

The Smith homology and a generalized Borsuk-Ulam Theorem

京都府立医科大学数学教室　長崎生光 (Ikumitsu Nagasaki)
Kyoto Prefectural University of Medicine
和歌山大学教育学部数学教室　川上智博 (Tomohiro Kawakami)
Faculty of Edufation, Wakayama University
大阪大学大学院理学研究科　原 靖浩 (Yasuhiro Hara)
Graduate school of Sience, Osaka University
京都産業大学理学部数理科学科数学教室　牛瀧文宏 (Fumihiro Ushitaki)
Faculty of Science, Kyoto Sangyo University

1 Introduction

Smith homology は [1] や [2] で書かれているように変換群論において様々な応用を持つ. Borsuk-Ulam の定理を証明するのに Smith homology を用いている文献は見当たらないが, [3] や [6] における証明では Smith exact sequence を用いて証明するのと同様のことをしている. この原稿では, まず, 群が自由に作用する空間について Smith homology の定義を与え, その場合に, [1] や [2] にも書かれている Smith exact sequence を紹介する. その上で, それを用いて, Borsuk-Ulam の定理を homology の観点から一般化した次の定理を証明しよう.

Theorem 1.1([5]). k を 2 以上の自然数とし, C_k を位数 k の巡回群とする. X を C_k が自由に作用する弧状連結な位相空間, Y を C_k が自由に作用する Hausdorff 空間とする. このとき, 自然数 n で, $1 \leqq q \leqq n$ に対して $H_q(X; \boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}) = 0$, かつ $H_{n+1}(Y/C_k; \boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}) = 0$ を満たすようなものが存在するならば, X から Y への C_k-map は存在しない.

この定理で $X = S^m$, $Y = S^n$ で C_k がこれらに自由に作用する場合 (k が 2 より大きいときは m, n は奇数) を考えると, $m > n$ ならば, S^m から S^n への C_k-map が存在しないというよく知られた Borsuk-Ulam の定理を得る.

2 The Smith homology

この章で, Smith homology を定義しよう. [1] や [2] では単体的複体の homology を用いているが, ここでは, singular homology を用いることにする.

以下, k を2以上の自然数とし, C_k を位数 k の巡回群とする. X を C_k-space とし, $\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}[C_k]$ を $\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}$ 上の C_k の群環とする.

$q \in \boldsymbol{Z}$ に対して, q 次鎖群 $C_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})$ は自然な C_k 作用を持ち, それが $C_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})$ 上の $\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}[C_k]$ 作用を導く.

g を C_k の生成元とし,

$$\alpha = 1 + g + \cdots + g^{k-1}$$
$$\beta = 1 - g$$

とおく. 定義より $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$ である. また, すべての q に対して $\alpha C_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})$ と $\beta C_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})$ は $C_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})$ の $\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}[C_k]$-submodule であり, $\alpha\partial = \partial\alpha, \beta\partial = \partial\beta$, が成り立つので ($\partial$ は $\{C_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\}$ の boundary operator を表す), $\{\alpha C_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\}$ および $\{\beta C_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\}$ は $\{C_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\}$ の subchain complex になる.

Proposition 2.1. すべての q に対して, 次の二つの系列は完全である.

$$0 \to \alpha C_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}) \xrightarrow{i} C_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}) \xrightarrow{\beta} \beta C_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}) \to 0,$$

$$0 \to \beta C_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}) \xrightarrow{j} C_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}) \xrightarrow{\alpha} \alpha C_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}) \to 0.$$

ここで, i, j は包含写像, α (resp. β) は α (resp. β) の積により定義される写像である.

Proof. $\beta \circ i = 0, \alpha \circ j = 0$ なので, $\mathrm{Im}\ i \subset \mathrm{Ker}\ \beta, \mathrm{Im}\ j \subset \mathrm{Ker}\ \alpha$ は成り立つ.

$s = \sum_j \sum_{i=0}^{k-1} n_{ji} g^i \sigma_j \in \mathrm{Ker}\ \beta$ とする. ここで, g は C_k の生成元であり, $l \neq l'$, $0 \leqq i \leqq k-1$ ならば, $g^i\sigma_l \neq \sigma_{l'}$ を満たすように σ_i をとっておく. $\beta s = 0$ なので, 任意の j に対して, $\sum_{i=0}^{k-1} n_{ji} g^i (1-g)\sigma_j = 0$ が成り立つ. したがって, この式の左辺を変形して, すべての j に対して, $\sum_{i=1}^{k-1}(n_{ji} - n_{j(i-1)})g^i\sigma_i + (n_{j0} - n_{j(k-1)})\sigma_j = 0$ を得る. 故に, $n_{j0} = n_{j1} = \cdots = n_{jk-1}$. $n_j = n_{j0} (= n_{j1} = \cdots = n_{jk-1})$ とおくと, $s = \sum_j n_j(1 + g + \cdots + g^{k-1})\sigma_j = \alpha \sum_j n_j \sigma_j \in \mathrm{Im}\ i$. したがって, $\mathrm{Ker}\ \beta = \mathrm{Im}\ i$ である.

次に $s=\sum_j\sum_{i=0}^{k-1}n_{ji}g^i\sigma_j\in \mathrm{Ker}\ \alpha$ とする. $\alpha s=\sum_j(n_{j0}+\cdots+n_{j(k-1)})(1+\cdots+g^{k-1})\sigma_j=0$ なので, $n_{j0}+\cdots+n_{j(k-1)}=0$ である.

したがって, $s=\sum_j(n_{j0}(1-g)+(n_{j0}+n_{j1})g(1-g)+(n_{j0}+n_{j1}+n_{j2})g^2(1-g)+\cdots+(n_{j0}+n_{j1}+\cdots+n_{j(k-2)})g^{k-2}(1-g))\sigma_j$ と変形できて, $s\in \mathrm{Im}j$. 故に $\mathrm{Ker}\alpha=\mathrm{Im}j$ である. ∎

$H_q^\alpha(X,\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})$, $H_q^\beta(X,\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})$ をそれぞれ chain complex $\{\alpha C_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\}$, $\{\beta C_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\}$ から定義される homology 群とする. この homology 群を Smith homology 群 と呼ぶ.

上の proposition から次の定理を得る.

Theorem 2.2. 次の二つの系列は完全である.

$$\begin{aligned}\cdots\to H_q^\alpha(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})&\xrightarrow{i_*}H_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\xrightarrow{\beta_*}H_q^\beta(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\\&\xrightarrow{\partial_*}H_{q-1}^\alpha(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\xrightarrow{i_*}H_{q-1}(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\xrightarrow{\beta_*}H_{q-1}^\beta(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\to\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cdots\to H_q^\beta(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})&\xrightarrow{j_*}H_q(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\xrightarrow{\alpha_*}H_q^\alpha(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\\&\xrightarrow{\partial'_*}H_{q-1}^\beta(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\xrightarrow{j_*}H_{q-1}(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\xrightarrow{\alpha_*}H_{q-1}^\alpha(X;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\to\cdots\end{aligned}$$

$k=2$ のとき $\alpha=\beta$ であり, 次の完全系列を得る.

$$\begin{aligned}\cdots\to H_q^\alpha(X;\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})&\xrightarrow{i_*}H_q(X;\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})\xrightarrow{\alpha_*}H_q^\alpha(X;\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})\\&\xrightarrow{\partial_*}H_{q-1}^\alpha(X;\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})\xrightarrow{i_*}H_{q-1}(X;\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})\xrightarrow{\alpha_*}H_{q-1}^\alpha(X;\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})\to\cdots\end{aligned}$$

次の proposition より, 上の定理で $k=2$ の場合は Thom-Gysin 完全系列 (cf. [4]) と同じものであることがわかる.

Proposition 2.3. Y を C_k が free に作用している Hausdorff空間とする. このとき, 任意の $q\in\boldsymbol{Z}$ に対して, $H_q^\alpha(Y,\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\cong H_q(Y/C_k,\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})$ である.

Proof. 最初に, $\alpha: C(Y;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\to\alpha C(Y;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})$ と orbit map $\pi:Y\to Y/C_k$ から誘導される準同型 $\pi_\sharp: C(Y;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})\to C(Y/C_k;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})$ が同じ kernel を持つことを示そう.

$\alpha(\sum n_i g^i\sigma) = (\sum n_i)\alpha(\sigma)$ より, $\alpha(\sum n_i g^i\sigma) = 0$ であるための必要十分条件は $\sum n_i = 0$ である. 一方, $\pi_\sharp(\sum n_i g^i\sigma) = (\sum n_i)\pi\circ\sigma$ なので, $\pi_\sharp(\sum n_i g^i\sigma) = 0$ であるための必要十分条件は $\sum n_i = 0$ である. したがって, α と $\pi_\sharp$ は同じ kernel を持つ.

$\tau : \Delta^s \to Y/C_k$ の lift $\tilde{\tau} : \Delta^s \to Y$ が存在するので $\pi_\sharp$ は全射である. また, $\alpha : C(Y; \boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}) \to \alpha C(Y; \boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})$ も明らかに全射である.

故に $\alpha C(Y; \boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})$ は $C(Y/C_p; \boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})$ と chain complex として同型である. したがって, $H_q^\alpha(Y, \boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}) \cong H_q(Y/C_k, \boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})$ である. ∎

3 Proof of Theorem 1.1

以下で, Introduction で紹介した Theorem 1.1 の証明をする.

Theorem 1.1 の状況のもとで C_k-map $f : X \to Y$ が存在すると仮定する. X は弧状連結であり, $f(X)$ も弧状連結である. したがって, $f(X)$ は Y のある弧状連結成分に含まれる. $f(X)$ に C_k が free に作用していることから $f(X)$ を含む Y の弧状連結成分にも C_k が free に作用していて, この弧状連結成分について議論をすればよいので, 簡単のため, Y は初めから弧状連結と仮定しておく.

初めに $k = 2$ の場合を証明しよう. f は C_2-map なので, $\alpha f_\sharp = f_\sharp\alpha$ である.

以下, 記述を簡単にするために, homology の係数の $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ を省略して書くことにする. 次の可換図式を考える. Theorem 2.2 より, この可換図式で水平方向は完全系列になっている.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\to & H_{n+1}^\alpha(X) & \overset{\partial_*^X}{\to} & H_n^\alpha(X) & \overset{i_*^X}{\to} & H_n(X) & \overset{\alpha_*^X}{\to} & H_n^\alpha(X) & \overset{\partial_*^X}{\to} & H_{n-1}^\alpha(X) & \to & \dots \\
 & f_*^\alpha\downarrow & & f_*^\alpha\downarrow & & f_*\downarrow & & f_*^\alpha\downarrow & & f_*^\alpha\downarrow & & \\
\to & H_{n+1}^\alpha(Y) & \overset{\partial_*^Y}{\to} & H_n^\alpha(Y) & \overset{i_*^Y}{\to} & H_n(Y) & \overset{\alpha_*^Y}{\to} & H_n^\beta(Y) & \overset{\partial_*^Y}{\to} & H_{n-1}^\alpha(Y) & \to & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\to & H_1^\alpha(X) & \overset{i_*^X}{\to} & H_1(X) & \overset{\alpha_*^X}{\to} & H_1^\alpha(X) & \overset{\partial_*^X}{\to} & H_0^\alpha(X) & \overset{i_*^X}{\to} & H_0(X) & \overset{\alpha_*^X}{\to} & H_0^\alpha(X) & \to & 0 \\
 & f_*^\alpha\downarrow & & f_*\downarrow & & f_*^\alpha\downarrow & & f_*^\alpha\downarrow & & f_*\downarrow & & f_*^\alpha\downarrow & & f_*\downarrow \\
\to & H_1^\alpha(Y) & \overset{i_*^Y}{\to} & H_1(Y) & \overset{\alpha_*^Y}{\to} & H_1^\alpha(Y) & \overset{\partial_*^Y}{\to} & H_0^\alpha(Y) & \overset{i_*^Y}{\to} & H_0(Y) & \overset{\alpha_*^Y}{\to} & H_0^\alpha(Y) & \to & 0
\end{array}$$

定義より, $(i_*^X)_0 = 0$ and $(i_*^Y)_0 = 0$ であり, $(\alpha_*^X)_0 : H_0(X) \to H_0^\alpha(X)$ と $(\alpha_*^Y)_0 : H_0(Y) \to H_0^\alpha(Y)$ は同型である. 仮定より, $H_0(X) \cong \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ であり, $H_0(X) \cong H_0^\alpha(X) \cong \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ となる. 同様にして, $H_0(Y) \cong H_0^\alpha(Y) \cong \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ である. $(f_*)_0 :$

$H_0(X) \to H_0(Y)$ は同型であり, $(\alpha_*^Y)_0 \circ (f_*)_0 = (f_*^\alpha)_0 \circ (\alpha_*^X)_0$ なので, $(f_*^\alpha)_0 : H_0^\alpha(X) \to H_0^\alpha(Y)$ も同型写像である.

$(i_*^X)_0 = 0$ より, $\mathrm{Im}\,(\partial_*^X)_1 = \mathrm{Ker}\,(i_*^X)_0 = H_0^\alpha(X)$. したがって, $(\partial_*^Y)_1 \circ (f_*^\alpha)_1 = (f_*^\alpha)_0 \circ (\partial_*^X)_1 : H_1^\alpha(X) \to H_0^\alpha(Y)$ は非自明な準同型 (つまり, その像が 0 でない) であることがわかる. 故に, $(f_*^\alpha)_1 : H_1^\alpha(X) \to H_1^\alpha(Y)$ も非自明な準同型である.

X に関する homology 群の仮定より, $1 \leqq q \leqq n$ に対して, $(\partial_*^X)_q : H_q^\alpha(X) \to H_{q-1}^\alpha(X)$ は同型となり, このことを用いると, 帰納的に $0 \leqq q \leqq n$ に対して $(f_*^\alpha)_q : H_q^\alpha(X) \to H_q^\alpha(Y)$ が非自明であることが示される.

Proposition 2.3 より $H_{n+1}^\alpha(Y) \cong H_{n+1}(Y/C_p)$ であることと, $H_{n+1}(Y/C_p) = 0$ の仮定より, $H_{n+1}^\alpha(Y) = 0$ である. したがって, $(i_*^Y)_n : H_n^\alpha(Y) \to H_n(Y)$ は単射であり, $(f_*^\alpha)_n : H_n^\alpha(X) \to H_n^\alpha(Y)$ が非自明な準同型であることと $(i_*^Y)_n : H_n^\alpha(Y) \to H_n(Y)$ が単射であることから, $(i_*^Y)_n \circ (f_*^\alpha)_n : H_n^\alpha(X) \to H_n(Y)$ は非自明な準同型である.

一方, $H_n(X) = 0$ なので, $(i_*^Y)_n \circ (f_*^\alpha)_n = (f_*)_n \circ (i_*^X)_n = 0$. これは矛盾であり, $k = 2$ の場合に X から Y への C_k-map が存在しないことが証明された.

次に $k > 2$ の場合を証明しよう. 以下, 記述を簡単にするために, homology の係数の $\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}$ を省略して書くことにする. 次の可換図式を考えよう. Theorem 2.2 より, 水平方向は完全系列になっている.

$$\begin{array}{cccccccccc}
\to & H_n^\alpha(X) & \xrightarrow{i_*^X} & H_n(X) & \xrightarrow{\beta_*^X} & H_n^\beta(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_{n-1}^\alpha(X) & \to & \cdots \\
 & f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & \\
\to & H_n^\alpha(Y) & \xrightarrow{i_*^Y} & H_n(Y) & \xrightarrow{\beta_*^Y} & H_n^\beta(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_{n-1}^\alpha(Y) & \to & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
\to & H_1^\alpha(X) & \xrightarrow{i_*^X} & H_1(X) & \xrightarrow{\beta_*^X} & H_1^\beta(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_0^\alpha(X) & \xrightarrow{i_*^X} & H_0(X) & \xrightarrow{\beta_*^X} & H_0^\beta(X) & \to & 0 \\
 & f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & f_* \downarrow \\
\to & H_1^\alpha(Y) & \xrightarrow{i_*^Y} & H_1(Y) & \xrightarrow{\beta_*^Y} & H_1^\beta(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_0^\alpha(Y) & \xrightarrow{i_*^Y} & H_0(Y) & \xrightarrow{\beta_*^Y} & H_0^\beta(Y) & \to & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\to & H_{n+1}^\alpha(X) & \xrightarrow{\partial_*'^X} & H_n^\beta(X) & \xrightarrow{j_*^X} & H_n(X) & \xrightarrow{\alpha_*^X} & H_n^\alpha(X) & \xrightarrow{\partial_*'^X} & H_{n-1}^\beta(X) & \to & \cdots \\
 & f_*^\alpha \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & \\
\to & H_{n+1}^\alpha(Y) & \xrightarrow{\partial_*'^Y} & H_n^\beta(Y) & \xrightarrow{j_*^Y} & H_n(Y) & \xrightarrow{\alpha_*^Y} & H_n^\alpha(Y) & \xrightarrow{\partial_*'^Y} & H_{n-1}^\beta(Y) & \to & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
\to & H_1^\beta(X) & \xrightarrow{j_*^X} & H_1(X) & \xrightarrow{\alpha_*^X} & H_1^\alpha(X) & \xrightarrow{\partial_*'^X} & H_0^\beta(X) & \xrightarrow{j_*^X} & H_0(X) & \xrightarrow{\alpha_*^X} & H_0^\alpha(X) & \to & 0 \\
 & f_*^\beta \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow \\
\to & H_1^\beta(Y) & \xrightarrow{j_*^Y} & H_1(Y) & \xrightarrow{\alpha_*^Y} & H_1^\alpha(Y) & \xrightarrow{\partial_*'^Y} & H_0^\beta(Y) & \xrightarrow{j_*^Y} & H_0(Y) & \xrightarrow{\alpha_*^Y} & H_0^\alpha(Y) & \to & 0
\end{array}$$

容易に $(i_*^X)_0 = 0$ と $(i_*^Y)_0 = 0$ がわかる．したがって，$(\beta_*^X)_0 : H_0(X) \to H_0^\beta(X)$ と $(\beta_*^Y)_0 : H_0(Y) \to H_0^\beta(Y)$ は同型である．$(f_*)_0 : H_0(X) \to H_0(Y)$ は同型なので，$(f_*^\beta)_0 : H_0^\beta(X) \to H_0^\beta(Y)$ も同型である．

同様にして，2 番目の可換図式で $(f_*^\alpha)_0 : H_0^\alpha(X) \to H_0^\alpha(Y)$ が同型であることが示される．

$H_1(X) = 0$ と $(i_*^X)_0 = 0$ より，$(\partial_*^X)_1 : H_1^\beta(X) \to H_0^\alpha(X)$ は同型である．同様にして，$(\partial_*'^X)_1 : H_1^\alpha(X) \to H_0^\beta(X)$ も同型である．

$(\partial_*^Y)_1 \circ (f_*^\beta)_1 = (f_*^\alpha)_0 \circ (\partial_*^X)_1$ および $(\partial_*'^Y)_1 \circ (f_*^\alpha)_1 = (f_*^\beta)_0 \circ (\partial_*'^X)_1$ から，$(f_*^\alpha)_1 : H_1^\alpha(X) \to H_1^\alpha(Y)$ と $(f_*^\beta)_1 : H_1^\alpha(X) \to H_1^\beta(Y)$ は非自明な準同型であることがわかる．

X に関する homology 群の仮定より，$1 \leqq q \leqq n$ に対して，$(\partial_*^X)_q : H_q^\beta(X) \to H_{q-1}^\alpha(X)$ および $(\partial_*'^X)_q : H_q^\alpha(X) \to H_{q-1}^\beta(X)$ は同型となり，帰納的に $(f_*^\alpha)_q : H_q^\alpha(X) \to H_q^\alpha(Y)$ と $(f_*^\beta)_q : H_1^\alpha(X) \to H_q^\beta(Y)$ が $0 \leqq q \leqq n$ で非自明な準同型であることが示される．Proposition 2.3 より，$H_{n+1}^\alpha(Y) \cong H_{n+1}(Y/C_p)$ であり，$H_{n+1}(Y/C_p) = 0$ なので，$\mathrm{Ker}(j_*^Y)_n = \mathrm{Im}(\partial_*'^Y)_{n+1} = 0$．したがって，$(j_*^Y)_n : H_n^\beta(Y) \to H_n(Y)$ は単射である．故に $(j_*^Y)_n \circ (f_*^\beta)_n$ は非自明な準同型である．

一方，$(j_*^Y)_n \circ (f_*^\beta)_n = (f_*)_n \circ (j_*^X)_n$ で $H_n(X) = 0$ なので，$(j_*^Y)_n \circ (f_*^\beta)_n = 0$ となる．これは矛盾である．以上で定理が証明された．∎

参考文献

[1] G. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, (1972).

[2] K. Kawakubo, *The theory of transformation groups*, Oxford Univ. Press, (1991).

[3] T. Kobayashi, *The Borsuk-Ulam theorem for a* $\boldsymbol{Z}_q$*-map from a* $\boldsymbol{Z}_q$*-space to* S^{2n+1}, Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), 714–716.

[4] M, Masuda, 講座 数学の考え方〈15〉代数的トポロジー, 朝倉書店 (2002).

[5] I. Nagasaki, T. Kawakami, Y. Hara and F. Ushitaki, *The Smith homology and Borsk-Ulam type theorems*, preprint.

[6] J.W. Walker, *A homology version of the Borsuk-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly **90** (1983), 466–468.